福井大学 大学院工学研究科 研究報告 第61巻 2013年3月
Mem. Grad. Eng. Univ. Fukui, Vol. 61 (March 2013)

高次のLagrange的摂動論による宇宙の大規模構造形成

立川崇之*

Higher-order Lagrangian perturbation for structure formation in the Universe

Takayuki TATEKAWA*

(Received February 8, 2013)

The structure formation in the Universe has been known as one of the most important problem in modern cosmology. The formation causes its self-gravitating instability and cosmic expansion. Therefore when we analyze the structure obtained by the observations, we would know the evolution of the Universe. We have derived fifth-order perturbative equations in Lagrangian perturbation theory for a cosmological dust fluid. These equations are derived under the supposition of Newtonian cosmology in the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker Universe model. The application of the fifth-order perturbation leads to a precise prediction of the large-scale structure.

***Key words*: Universe, Large-scale structure, fluid dynamics, cosmology**

1. 緒 言

星が集まって星団，銀河を形作り，銀河は銀河群，銀河団を構成している．それではより大きなスケールの構造はどのようになっているのか．CfA survey により存在が示された宇宙の大規模構造は，近年の SDSS による大規模な銀河サーベイ計画により明らかになってきている[1]．

現在の観測によると，現在の宇宙のエネルギー密度の約4%がバリオン，約23%がダークマターと呼ばれる光を発しない物質，約73%がダークエネルギーと呼ばれる宇宙の加速膨張を引き起こす成分とされている[2]．宇宙の大規模構造は，宇宙開闢から約38万年後に起きた宇宙の腫れ上がりの際，輻射と分離したバリオンが，ダークマターの密度ゆらぎに引きずられ，重力不安定により成長して形成されたと考えられている．このシナリオに基づく理論的予言は，物質分布を質点で代表させる宇宙論的 N 体シミュレーションと，一様分布からのずれの進化を取り扱う摂動論が広く用いられてきた．強い非線形段階の進化は宇宙論的 N 体シミュレーションを用いる必要があるが，近年はその初期条件を与える際の摂動の妥当性について議論されている．また，今後は遠方の大規模構造を探る観測計画が検討されている．遠方の構造とはすなわち過去の構造であり，非線形性が現在ほど強くない．このため，摂動論の有効性が今後ますます高まると考えられる．

本研究は摂動論のうち，Lagrange 的摂動論に関する高次の解の導出に関するものである[3],[4]．摂動論では流体力学的記述を用いるが，流体力学では Euler 的な立場と Lagrange 的な立場がある．前者は空間座標に対し，各点での物理量を議論し，後者は流体素片に着目し，この素片に付随する物理量を議論する．一様分布からのずれである密度ゆらぎを議論する際，Euler 的な立場だと密度ゆらぎそのものを摂動として扱い，密度揺らぎの時間発展方程式を直接取り扱う事になり明解であるが，密度ゆらぎが1に近づくと精度が落ちてしまう．一方，Lagrange 的な立場では一様分布からの変位を摂動として取り扱い，摂動は線形段階でも準非線形の密度ゆらぎを精度良く取り扱えるという利点がある．

Lagrange 的摂動論は1970年に Zel'dovich[5] により線形発展方程式が発表されて以降，二次，三次の摂動方程式が導出され，広く用いられてきた[6]–[11]．近年，摂動論の有効性が再注目されており，四次の摂動方程式が導出されている[12],[13]．本論文ではさらに，著者が導出した五次摂動方程式とその解を示し，応用例について考察する．

*総合情報基盤センター
*Center for Information Initiative

2. 基礎方程式

2.1 Newton 的宇宙論の基礎方程式

本研究では背景の膨張則は Friedmann 方程式で記述され，構造を形成する物質は Newton 力学で記述する，Newton 的宇宙論の立場で構造形成を考える[3],[4]．Newton 的宇宙論は地平線スケール（$\simeq 3000h^{-1}$ [Mpc]）のような大スケールや，大質量ブラックホールが存在する状況を考えなければ妥当な結果を与えると考えられている．Newton 的宇宙論では，物質を完全流体とみなした時，連続の方程式，Euler 方程式，Poisson 方程式の三つの方程式を連立させて考える．

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_r + \nabla_r\cdot(\rho\mathbf{u}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right)_r + (\mathbf{u}\cdot\nabla)_r\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla_r P + \mathbf{g}\,, \tag{2}$$

$$\mathbf{g} = -\nabla_r\Phi\,, \nabla\cdot\mathbf{g} = 4\pi G\rho\,, \tag{3}$$

ここで現れた物理量 $\rho, P, \mathbf{u}, \mathbf{g}, \Phi$ はそれぞれ，質量密度，圧力，速度，重力加速度，重力ポテンシャルを表す．G は重力定数である．

宇宙膨張は座標変換に依って与える．宇宙膨張に乗った新しい座標系（共動座標系）への変換を行う．

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}}{a(t)}, a(t) : \text{scale factor} \tag{4}$$

座標変換 (4) により，速度，微分演算子が以下の様に変換を受ける．

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), (\mathbf{v} \equiv a\dot{\mathbf{x}})\,, \tag{5}$$

$$\nabla_x = a\nabla_r\,, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}=\mathbf{r}/a, t)}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{x}\cdot\nabla_x)f\,, \tag{7}$$

ここで現れた $\mathbf{v}$ は固有速度と呼ばれ，宇宙膨張に引きずられる運動とは別に現れる速度である．また，宇宙の大規模構造で注目する密度ゆらぎ δ を以下のように定義する．

$$\rho = \rho_b(t)\{1+\delta(\mathbf{x}, t)\}\,, \quad \rho_b \propto a^{-3}\,. \tag{8}$$

これらの書き換えにより，まず連続の方程式は以下の様に書き換えられる．

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\nabla_x\cdot\{\mathbf{v}(1+\delta)\} = 0\,. \tag{9}$$

Poisson 方程式は以下の様に変更を受ける．

$$\nabla_x^2\phi = 4\pi G\rho_b a^2\delta\,, \quad \phi \equiv \Phi - \frac{2}{3}\pi G a^2\mathbf{x}^2\rho_b\,. \tag{10}$$

Euler 方程式は以下の様に書き換えられる．

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = -\frac{1}{a}\nabla\phi - \frac{1}{a\rho}\nabla P\,. \tag{11}$$

以上の (9), (10), (11) の三つが，共動座標系での基礎方程式である．

2.2 Lagrange 的記述による発展方程式

Zel'dovich[5] によって提案された Lagrange 的摂動論は，密度分布の非一様を物質の一様分布からの変位として考える．この変位を摂動として与え，Eular 座標から Lagrange 座標への変換を行う．以後，Euler 的な共動座標を $\mathbf{x}$，Lagrange 座標を $\mathbf{q}$ と書く事にする．

Lagrange 的摂動論は Euler 的摂動論に比べ，同じ近似の次数においてより非線形性の高い領域まで精度良く近似を行うことができる[14]–[16]．

以下，基礎方程式を Lagrange 的記述に置き換えていく．まず，時間微分を Lagrange 微分に置き換える．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{a}(\mathbf{v}\cdot\nabla_x)\,. \tag{12}$$

連続の方程式 (9), Euler 方程式 (11) は次のように書き換えられる．

$$\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{a}\nabla_x\cdot(\mathbf{v}(1+\delta)) = 0\,, \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho a}\nabla_x P\,. \tag{14}$$

以下，流体は圧力を無視出来るダストとみなして，$P = 0$ とする．Euler 方程式の div, rot を取り，連続の方程式 (13) を用いると以下の様に書き換えられる．Lagrange 近似において，Lagrange 摂動 $\mathbf{s}(t, \mathbf{q})$ は以下の様に与える．

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \mathbf{s}(t, \mathbf{q})\,. \tag{15}$$

$\mathbf{x}$ から $\mathbf{q}$ への変換の Jacobian を J とする．

$$\begin{aligned} J &= \left|\det\left[\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right]\right| = |\det[\delta_{ij} + s_{i,j}]| \\ &= 1 + s_{i,i} + \frac{1}{2}\{s_{i,i}s_{j,j} - s_{i,j}s_{j,i}\} \\ &\quad + \det(s_{i,j})\,. \end{aligned} \tag{16}$$

J を用いると，連続の方程式 (13) は厳密に解ける．

$$\rho(\mathbf{x})J\mathrm{d}^3q = \rho(\mathbf{q})\mathrm{d}^3q \to \delta = \frac{1-J}{J}\,. \tag{17}$$

固有速度 $\mathbf{v}$ も Lagrange 摂動 $\mathbf{s}$ で記述される．

$$\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{s}}\,. \tag{18}$$

Euler 方程式は div，rot を取る事によりモード分解出来る．Euler 座標での空間微分を用いると以下の様に記述される．

$$\nabla_x\cdot\left(\ddot{\mathbf{s}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathbf{s}}\right) = -4\pi G\rho_b(J^{-1}-1)\,, \tag{19}$$

$$\nabla_x\times\left(\ddot{\mathbf{s}} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathbf{s}}\right) = \mathbf{0}\,. \tag{20}$$

Euler 座標による空間微分を，Lagrange 座標による空間微分で書き換える時には注意が必要である．通常の

方法[13]では，Euler座標とLagrange座標の空間微分の書き換え，JacobianのLagrange摂動による展開を，摂動の次数と同じ必要な次数まで行う*.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial q_i} - s_{j,i}\frac{\partial}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} - s_{j,i}\frac{\partial}{\partial q_j} + s_{k,j}s_{j,i}\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_i} - s_{j,i}\frac{\partial}{\partial q_j} + s_{k,j}s_{j,i}\frac{\partial}{\partial q_k} \\ &\quad - s_{l,k}s_{k,j}s_{j,i}\frac{\partial}{\partial x_l}\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Rampf and Buchert[12]では，Lagrange座標の空間微分をEuler座標とLagrange座標の変換によるJacobian行列の逆行列を用いて記述する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_i} &= \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \\ \to \frac{\partial}{\partial x_i} &= J^{-1}_{ij}\frac{\partial}{\partial q_j}\,, \end{aligned} \tag{22}$$

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\,, \tag{23}$$

$$J^{-1}_{ij} = \frac{1}{J}\mathrm{adj}[J_{ij}] = \frac{1}{2J}\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}J_{pl}J_{qm}\,. \tag{24}$$

この方法を用いると，Euler方程式のdivの右辺に(17)から現れる$1/J$が相殺される．この結果，摂動方程式のsource termには摂動の三重積までしか現れなくなり，式が少し単純になる.

さらに，時間変数についてSuperconformal time[10]を用いる.

$$\eta \equiv \sqrt{-k}(1-\Omega)^{-1/2} \qquad (\Omega \neq 1)\,, \tag{25}$$

$$a^2 \mathrm{d}\eta \equiv \mathrm{d}t \qquad (\Omega = 1)\,. \tag{26}$$

Ωは密度パラメータで，$\Omega=1$が平坦な宇宙，$\Omega>1$が閉じた宇宙，$\Omega<1$が開いた宇宙と対応する．解くべき方程式は以下の様に書き換えられる†.

$$\alpha(\eta)\,[J-1] = \left[(1+s_{l,l})\delta_{ij} - s_{i,j} + s^c_{i,j}\right]\,, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}s'_{k,j} &= \varepsilon_{ijk}s_{l,j}s'_{l,k} \\ &\quad + s_{i,n}\varepsilon_{njk}(s_{l,j}s'_{l,k} - s'_{k,j})\,, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\alpha(\eta) \equiv \frac{6}{\eta^2 + k}\,. \tag{29}$$

$s^c_{i,j}$は$s_{i,j}$を行列とみなしたときの余因子行列である．kは空間曲率で$-1,0,1$のいずれかである．特に(30)については

$$c_i \equiv \varepsilon_{ijk}\left(s'_{k,j} - s_{l,j}s'_{l,k}\right)\,, \tag{30}$$

なる量を定義すると，

$$c_i = s_{i,j}c_j\,, \tag{31}$$

と表す事が出来る.

我々の方法とRampf and Buchertの方法では，三次の摂動方程式まで全く同じ形になる．ところがsource termの現れ方が異なる四次以上では形が異なる．両者の方法の比較や整合性についての確認は別の機会に行う事として，本論文ではRampf and Buchertの方法により五次までの摂動方程式を導出し，その解を求める事とする.

3. Lagrange的摂動解

3.1 一次の摂動解

一次の摂動解について，以下の様にモード分解をし，かつ変数分離しておく.

$$s^{(1)}_i = g_1(\eta)\psi^{(1)}_{,i}(\mathbf{q}) + g_{1T}(\eta)\zeta^{(1)}_i(\mathbf{q})\,. \tag{32}$$

右辺第一項がlongitudinal mode，第二項がtransverse modeである．longitudinal modeはrotation free，transverse modeはdivergence freeである．前者はスカラー関数のdivergenceで記述出来る.

longitudinal modeについては(27)から以下の様になる.

$$(g''_1 - \alpha g_1)\,\psi^{(1)}_{,ii} = 0\,. \tag{33}$$

空間成分については適切な境界条件を取る事に依ってLaplace方程式が解ける．線形摂動だけを考慮すると，ψは初期密度ゆらぎと結びつく.

$$\psi^{(1)}_{,ii} = -\delta\,. \tag{34}$$

よって初期密度場から$\psi^{(1)}$を決定する事が出来る．時間成分については$k=0$で宇宙項の存在しないEinstein-de Sitter (E-dS)宇宙モデルの時は非常に簡単に解ける.

$$g^+_1 = \frac{1}{\tau^2} = t^{2/3}\,, \tag{35}$$

$$g^-_1 = \tau^3 = t^{-1}\,. \tag{36}$$

構造形成においては成長解が重要である．そこで以後，g^+_1のみに着目してこれをg_1と表す事にし，g^-_1は無視する.

以下，表記を簡略化するために

$$\mu^{(n)}_1 \equiv \psi^{(n)}_{,ii}\,, \tag{37}$$

とする.

transverse modeについては(30)から

$$g'_{1T} = 0\,, \tag{38}$$

---

*ここでは，同じ添字が現れた場合には無条件に添字の総和を取る「Einsteinの縮約」を用いている．Σ記号が大量に現れるので，以後は断わりなくEinsteinの縮約を用いる

†添字のカンマはLagrange座標の成分に依る偏微分を表す．たとえば$s_{i,j}$は，s_iをq_jで微分するという意味である.

となり，$k=0$ の場合には

$$g_{1T} \propto t^0, t^{-1/3}, \tag{39}$$

となる，つまり成長解が存在しない．そこで一次の摂動では longitudinal mode のみが存在するとして，高次の摂動を考えて行く事にする．なお (31) を用いると，

$$c_i^{(1)} = 0, \tag{40}$$

である．

3.2 二次の摂動解

二次の摂動解について，以下の様にモード分解をし，かつ変数分離しておく[6],[7]．

$$s_i^{(2)} = g_2(\eta)\psi_{,i}^{(2)}(\mathbf{q}) + g_{2T}(\eta)\zeta_i^{(2)}(\mathbf{q}). \tag{41}$$

右辺第一項が longitudinal mode，第二項が transverse mode である．

longitudinal mode については (27) から以下の様になる．

$$g_2'' - \alpha g_2 = -\alpha g_1^2, \tag{42}$$

$$\psi_{,ii}^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\psi_{,ii}^{(1)}\psi_{,jj}^{(1)} - \psi_{,ij}^{(1)}\psi_{,ij}^{(1)}\right). \tag{43}$$

表記を簡略化するために

$$\mu_2^{(m,n)} \equiv \frac{1}{2}\left(\psi_{,ii}^{(m)}\psi_{,jj}^{(n)} - \psi_{,ij}^{(m)}\psi_{,ij}^{(n)}\right), \tag{44}$$

$$\mu_2^{(n)} \equiv \mu_2^{(n,n)}, \tag{45}$$

とする．つまり，

$$\mu_1^{(2)} = \mu_2^{(1)}, \tag{46}$$

である．

時間成分に関して E-dS 宇宙モデルでの非斉次解は以下の様になる．

$$g_2 = -\frac{3}{7\tau^4} = -\frac{3}{7}t^{4/3}. \tag{47}$$

E-dS 宇宙モデルでない場合には，(47) のように記述する事は出来ないが，一次の摂動解を用いて近似的に以下の様に書く事が出来る．

$$g_2 \simeq -\frac{3}{7}g_1^2. \tag{48}$$

transverse mode については (30) から

$$g_{2T}' = 0, \tag{49}$$

となり，一次の場合と同じ形の式になる．つまり二次の transverse mode は非斉次解がなく一次の場合と解が一致し，成長解が存在しない．

3.3 三次の摂動解

三次の摂動解については，longitudinal mode と transverse mode でモード分解の仕方が異なる[8]-[11]．

$$\begin{aligned} s_i^{(3)} &= g_{3a}(\eta)\psi_{,i}^{(3a)}(\mathbf{q}) + g_{3b}(\eta)\psi_{,i}^{(3b)}(\mathbf{q}) \\ &\quad + g_{3T}(\eta)\zeta_i^{(3)}(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{50}$$

これは，三次の longitudinal mode の source term に，(一次) × (二次) の項と，(一次) の三乗の項が現れるからである．

longitudinal mode については以下の様になる．

$$g_{3a}'' - \alpha g_{3a} = -2\alpha g_1(g_2 - g_1^2), \tag{51}$$

$$g_{3b}'' - \alpha g_{3b} = -2\alpha g_1^3, \tag{52}$$

$$\psi_{,ii}^{(3a)} = \frac{1}{2}\left(\psi_{,ii}^{(1)}\psi_{,jj}^{(2)} - \psi_{,ij}^{(1)}\psi_{,ij}^{(2)}\right), \tag{53}$$

$$\psi_{,ii}^{(3b)} = \det\left(\psi_{,ij}^{(1)}\right). \tag{54}$$

時間成分の解は以下の通りとなる．

$$g_{3a} \simeq \frac{10}{21}g_1^3, \tag{55}$$

$$g_{3b} \simeq -\frac{1}{3}g_1^3. \tag{56}$$

transverse mode については，source term が残る．本来は時間に関する一階の微分方程式であるが，source term の微分を消去するために二階微分方程式の形で記述している．

$$g_{3T}'' = -\alpha g_1^3, \tag{57}$$

$$\varepsilon_{ijk}\zeta_{k,j}^{(3)} = \varepsilon_{ijk}\psi_{,jl}^{(1)}\psi_{l,k}^{(2)}. \tag{58}$$

この方程式の時間成分の解は以下の通りである．

$$g_{3T} \simeq -\frac{1}{7}g_1^3. \tag{59}$$

3.4 四次の摂動解

四次の摂動解については source term の分類を考え，longitudinal mode と transverse mode でモード分解が複雑になる．

$$\begin{aligned} s_i^{(4)} &\doteq \sum_\alpha g_{4\alpha}(\eta)\psi_{,i}^{(4\alpha)}(\mathbf{q}) \\ &\quad + \sum_\beta g_{4T\beta}(\eta)\zeta_i^{(4\beta)}(\mathbf{q}). \end{aligned} \tag{60}$$

α, β はローマ字に関して和を取る．

longitudinal mode に関しては，Rampf and Buchert の方法では 5 種類の source term が現れるので，それぞれについて分離して方程式を解く．

$$g_{4a}'' - \alpha g_{4a} = -2\alpha(g_1 g_{3a} - 2g_1^2 g_2 + 2g_1^4), \tag{61}$$

$$g_{4b}'' - \alpha g_{4b} = -2\alpha(g_1 g_{3b} - 2g_1^4), \tag{62}$$

$$g''_{4c} - \alpha g_{4c} = -\alpha g_1^4 , \quad (63)$$
$$g''_{4d} - \alpha g_{4d} = -\alpha g_2 (g_2 - 2g_1^2) , \quad (64)$$
$$g''_{4e} - \alpha g_{4e} = \alpha \left(-g_1^2 g_2 + \frac{1}{2} g_1^4 \right) , \quad (65)$$
$$\mu_1^{(4a)} = \mu_2^{(1,3a)} , \quad (66)$$
$$\mu_1^{(4b)} = \mu_2^{(1,3b)} , \quad (67)$$
$$\mu_1^{(4c)} = \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(3)} , \quad (68)$$
$$\mu_1^{(4d)} = \mu_2^{(2)} , \quad (69)$$
$$\mu_1^{(4e)} = \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jpq} \psi_{,pl}^{(1)} \psi_{,qm}^{(1)} \psi_{,ij}^{(2)} . \quad (70)$$

これらの時間成分は以下の様になる.

$$g_{4a} \simeq -\frac{20}{33} g_1^4 , \quad (71)$$
$$g_{4b} \simeq \frac{14}{33} g_1^4 , \quad (72)$$
$$g_{4c} \simeq -\frac{1}{11} g_1^4 , \quad (73)$$
$$g_{4d} \simeq -\frac{51}{539} g_1^4 , \quad (74)$$
$$g_{4e} \simeq \frac{13}{154} g_1^4 . \quad (75)$$

transverse mode については (30) からは source term に三重積が現れる様に見えるが, (31) の書き換えを行って確かめると, (一次) × (三次) の source term しか現れない. よって, 3 種類の source term が現れるので, それぞれについて分離して方程式を解く.

$$g''_{4Ta} = -2\alpha g_1^2 (g_2 - g_1^3) , \quad (76)$$
$$g''_{4Tb} = -2\alpha g_1^4 , \quad (77)$$
$$g''_{4Tc} = -\alpha g_1 (g_{3T} + g_1^3) , \quad (78)$$
$$\varepsilon_{ijk} \zeta_{k,j}^{(4a)} = \varepsilon_{ijk} \psi_{,jl}^{(1)} \psi_{,kl}^{(3a)} , \quad (79)$$
$$\varepsilon_{ijk} \zeta_{k,j}^{(4b)} = \varepsilon_{ijk} \psi_{,jl}^{(1)} \psi_{,kl}^{(3b)} , \quad (80)$$
$$\varepsilon_{ijk} \zeta_{k,j}^{(4c)} = \varepsilon_{ijk} \psi_{,jl}^{(1)} \zeta_{l,k}^{(3)} . \quad (81)$$

時間成分の解は以下の通りになる.

$$g_{4Ta} \simeq \frac{5}{21} g_1^4 , \quad (82)$$
$$g_{4Tb} \simeq -\frac{1}{6} g_1^4 , \quad (83)$$
$$g_{4Tc} \simeq -\frac{1}{14} g_1^4 . \quad (84)$$

3.5 五次の摂動解

四次の摂動解を用いる事で, 例えば密度揺らぎの bispectrum に対する 1-loop 補正の計算が出来る様になる[17]. ところが, 偶数次で摂動を打ち切ると, 密度ゆらぎが負の領域であるボイドの成長をうまく記述出来ない. 長時間の計算を進めると, 負の密度ゆらぎの成長が止まり, 反転して密度ゆらぎが正になってしまう事が知られている. また, 後述するが密度揺らぎのパワースペクトルに対する補正は, 三次の摂動を用いると 2-loop 補正が行えるが, さらに補正を行うには四次の摂動では不十分である. そこで我々は, 今後の幅広い応用を考え, 五次の摂動方程式とその解を導出する事とした[18].

四次の場合と同様に source term の分類を考え, longitudinal mode と transverse mode でモード分解を行う.

$$s_i^{(5)} = \sum_\alpha g_{5\alpha}(\eta) \psi_{,i}^{(5\alpha)}(\mathbf{q}) + \sum_\beta g_{5T\beta}(\eta) \zeta_i^{(5\beta)}(\mathbf{q}) . \quad (85)$$

α, β はローマ字に関して和を取る.

longitudinal mode に関しては, Rampf and Buchert の方法では 15 種類の source term が現れるので, それぞれについて分離して方程式を立てる.

$$g''_{5a} - \alpha g_{5a} = -2\alpha g_1 \left(g_{4a} - 2g_{3a} + 4g_1 g_2 - 4g_1^3 \right) , \quad (86)$$
$$g''_{5b} - \alpha g_{5b} = -2\alpha g_1 \left(g_{4b} - 2g_1 g_{3b} + 4g_1^4 \right) , \quad (87)$$
$$g''_{5c} - \alpha g_{5c} = -2\alpha g_1 (g_{4c} - g_1^4) , \quad (88)$$
$$g''_{5d} - \alpha g_{5d} = -2\alpha g_1 (g_{4d} - g_2^2 + 2g_1^2 g_2) , \quad (89)$$
$$g''_{5e} - \alpha g_{5e} = -\alpha g_1 (2g_{4e} - 2g_1^2 g_2 + g_1^4) , \quad (90)$$
$$g''_{5f} - \alpha g_{5f} = 4\alpha g_1^3 (g_2 - g_1^2) , \quad (91)$$
$$g''_{5g} - \alpha g_{5g} = 4\alpha g_1^5 , \quad (92)$$
$$g''_{5h} - \alpha g_{5h} = 2\alpha g_1^2 (g_{3T} + g_1^3) , \quad (93)$$
$$g''_{5i} - \alpha g_{5i} = -2\alpha (g_{3a} - 2g_1 g_2) \times (g_2 - g_1^2) , \quad (94)$$
$$g''_{5j} - \alpha g_{5j} = -2\alpha \left(g_2 g_{3b} - g_1^2 g_{3b} - 2g_1^3 g_2 \right) , \quad (95)$$
$$g''_{5k} - \alpha g_{5k} = -\alpha g_1^2 (g_{3T} + g_1 g_2) , \quad (96)$$
$$g''_{5l} - \alpha g_{5l} = \alpha g_1^2 (g_{3a} - g_1 g_2 + g_1^3) , \quad (97)$$
$$g''_{5m} - \alpha g_{5m} = \alpha g_1^2 (g_{3b} - g_1^3) , \quad (98)$$
$$g''_{5n} - \alpha g_{5n} = \frac{\alpha}{2} g_1^2 (g_{3T} - g_1^3) , \quad (99)$$
$$g''_{5o} - \alpha g_{5o} = \alpha g_1 g_2 (g_2 - g_1^2) , \quad (100)$$
$$\mu_1^{(5a)} = \mu_2^{(1,4a)} , \quad (101)$$
$$\mu_1^{(5b)} = \mu_2^{(1,4b)} , \quad (102)$$
$$\mu_1^{(5c)} = \mu_2^{(1,4c)} , \quad (103)$$
$$\mu_1^{(5d)} = \mu_2^{(1,4d)} , \quad (104)$$
$$\mu_1^{(5e)} = \mu_2^{(1,4e)} , \quad (105)$$
$$\mu_1^{(5f)} = \psi_{,ij}^{(1)} \zeta_{i,j}^{(4a)} , \quad (106)$$

$$\mu_1^{(5g)} = \psi^{(1)}_{,ij}\zeta^{(4b)}_{i,j}\,, \tag{107}$$
$$\mu_1^{(5h)} = \psi^{(1)}_{,ij}\zeta^{(4c)}_{i,j}\,, \tag{108}$$
$$\mu_1^{(5i)} = \mu_2^{(2,3a)}\,, \tag{109}$$
$$\mu_1^{(5j)} = \mu_2^{(2,3b)}\,, \tag{110}$$
$$\mu_1^{(5k)} = \psi^{(2)}_{,ij}\zeta^{(3)}_{i,j}\,, \tag{111}$$
$$\mu_1^{(5l)} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\psi^{(1)}_{,pl}\psi^{(1)}_{,qm}\psi^{(3a)}_{,ij}\,, \tag{112}$$
$$\mu_1^{(5m)} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\psi^{(1)}_{,pl}\psi^{(1)}_{,qm}\psi^{(3b)}_{,ij}\,, \tag{113}$$
$$\mu_1^{(5n)} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\psi^{(1)}_{,pl}\psi^{(1)}_{,qm}\zeta^{(3)}_{j,i}\,, \tag{114}$$
$$\mu_1^{(5o)} = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\psi^{(1)}_{,pl}\psi^{(2)}_{,qm}\psi^{(2)}_{,ij}\,. \tag{115}$$

これらの時間成分は以下の様になる．

$$g_{5a} \simeq \frac{120}{143}g_1^5\,, \tag{116}$$
$$g_{5b} \simeq -\frac{84}{143}g_1^5\,, \tag{117}$$
$$g_{5c} \simeq \frac{18}{143}g_1^5\,, \tag{118}$$
$$g_{5d} \simeq \frac{918}{7007}g_1^5\,, \tag{119}$$
$$g_{5e} \simeq -\frac{9}{77}g_1^5\,, \tag{120}$$
$$g_{5f} \simeq -\frac{30}{91}g_1^5\,, \tag{121}$$
$$g_{5g} \simeq \frac{3}{13}g_1^5\,, \tag{122}$$
$$g_{5h} \simeq \frac{9}{91}g_1^5\,, \tag{123}$$
$$g_{5i} \simeq \frac{20}{91}g_1^5\,, \tag{124}$$
$$g_{5j} \simeq -\frac{2}{13}g_1^5\,, \tag{125}$$
$$g_{5k} \simeq \frac{3}{91}g_1^5\,, \tag{126}$$
$$g_{5l} \simeq \frac{10}{91}g_1^5\,, \tag{127}$$
$$g_{5m} \simeq -\frac{1}{13}g_1^5\,, \tag{128}$$
$$g_{5n} \simeq -\frac{3}{91}g_1^5\,, \tag{129}$$
$$g_{5o} \simeq \frac{45}{1274}g_1^5\,. \tag{130}$$

transverse mode に関しては，source term に摂動の二重項だけが現れる．可能な組合せは 11 種類である．それぞれについて分離して方程式を立てる．

$$g''_{5Ta} = -2\alpha g_1^2(g_{3a} - 2g_1g_2 + 2g_1^3)\,, \tag{131}$$
$$g''_{5Tb} = -2\alpha g_1^2(g_{3b} - 2g_1^3)\,, \tag{132}$$
$$g''_{5Tc} = -\alpha g_1^5\,, \tag{133}$$
$$g''_{5Td} = \alpha g_1 g_2(-g_2 + 2g_1^2)\,, \tag{134}$$
$$g''_{5Te} = \alpha g_1^3\left(-g_2 + \frac{1}{2}g_1^2\right)\,, \tag{135}$$
$$g''_{5Tf} = -\alpha g_1(g_{4Ta} + 2g_1^2g_2 - 2g_1^4)\,, \tag{136}$$
$$g''_{5Tg} = -\alpha g_1(g_{4Tb} + 2g_1^4)\,, \tag{137}$$
$$g''_{5Th} = -\alpha g_1(g_{4Tc} + g_1g_{3T} + g_1^4)\,, \tag{138}$$
$$g''_{5Ti} = \alpha g_1(g_1g_{3a} - 2g_2^2 + 2g_1^2g_2)\,, \tag{139}$$
$$g''_{5Ti} = \alpha g_1^2(g_{3b} - 2g_1g_2)\,, \tag{140}$$
$$g''_{5Tk} = -\alpha\left\{(g_2 - g_1^2)g_{3T} + g_1^3g_2\right\}\,, \tag{141}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5a)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\psi^{(4a)}_{,kl}\,, \tag{142}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5b)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\psi^{(4b)}_{,kl}\,, \tag{143}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5c)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\psi^{(4c)}_{,kl}\,, \tag{144}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5d)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\psi^{(4d)}_{,kl}\,, \tag{145}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5e)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\psi^{(4e)}_{,kl}\,, \tag{146}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5f)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\zeta^{(4a)}_{l,k}\,. \tag{147}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5g)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\zeta^{(4b)}_{l,k}\,. \tag{148}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5h)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(1)}_{,jl}\zeta^{(4c)}_{l,k}\,. \tag{149}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5i)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(2)}_{,jl}\psi^{(3a)}_{,kl}\,, \tag{150}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5j)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(2)}_{,jl}\psi^{(3b)}_{,kl}\,, \tag{151}$$
$$\varepsilon_{ijk}\zeta^{(5k)}_{k,j} = \varepsilon_{ijk}\psi^{(2)}_{,jl}\zeta^{(3)}_{l,k}\,. \tag{152}$$

時間成分の解は以下の通りになる．

$$g_{5Ta} \simeq -\frac{4}{11}g_1^5\,, \tag{153}$$
$$g_{5Tb} \simeq \frac{14}{55}g_1^5\,, \tag{154}$$
$$g_{5Tc} \simeq -\frac{3}{55}g_1^5\,, \tag{155}$$
$$g_{5Td} \simeq -\frac{153}{2695}g_1^5\,, \tag{156}$$
$$g_{5Te} \simeq \frac{39}{770}g_1^5\,, \tag{157}$$
$$g_{5Tf} \simeq \frac{1}{7}g_1^5\,, \tag{158}$$
$$g_{5Tg} \simeq -\frac{1}{10}g_1^5\,, \tag{159}$$
$$g_{5Th} \simeq -\frac{3}{70}g_1^5\,, \tag{160}$$
$$g_{5Ti} \simeq -\frac{2}{49}g_1^5\,, \tag{161}$$
$$g_{5Tj} \simeq \frac{1}{35}g_1^5\,, \tag{162}$$
$$g_{5Tk} \simeq \frac{3}{245}g_1^5\,. \tag{163}$$

4. 摂動解の応用

4.1 バリオン音響振動

現在の宇宙のエネルギー密度の大半は，ダークエネルギーおよびダークマターが占めている．宇宙の晴れ上がりまではバリオンは光子と密接な相互作用をなすため，バリオンの密度ゆらぎは輻射によってならされ，成長する事が出来なかった．宇宙の晴れ上がり時に自由電子が原子核に捕獲され，光子が Thomson 散乱を受

けず自由に動ける様になる事で，バリオンの密度ゆらぎも成長出来る様になる．

晴れ上がり時のタイムスケールは，(4) で与えたスケールファクターを用いて，赤方偏移

$$z \equiv \frac{a(t_{now})}{a(t)}, \tag{164}$$

を用いると，$z \simeq 1000$ である．つまり，現在の宇宙の 1/1000 ほどの大きさの時に，晴れ上がりが起きた．

宇宙の晴れ上がり時に既に成長しているダークマターの密度ゆらぎに引きずられる事で，バリオンの密度ゆらぎも線形摂動の成長率以上に，急速に成長する．線形摂動では密度ゆらぎは宇宙のスケールファクターと同程度の成長しか出来ず，宇宙の晴れ上がり時と現在を比較するとスケールファクターは 10^3 ほど違うだけであるので，10^3 倍しか密度ゆらぎが成長しない．一方で宇宙の晴れ上がり時における輻射の揺らぎを表す宇宙背景輻射の温度揺らぎは，10^{-5} 程度である．宇宙の腫れ上がり時のバリオンの密度ゆらぎは同程度であるので，そのまま線形成長したのでは現在観測される様な銀河，銀河団等は形成されない．ダークマターの揺らぎがそれより 2 桁程度は大きかったため，現在観測される様な構造が形成されたと考えられる．

ところで，バリオンは宇宙の晴れ上がりまでは輻射と相互作用を及ぼしあい振動をしていた．この振動をバリオン音響振動（BAO）という．BAO の痕跡は現在の観測に見出されるだろうか．近年，SDSS の銀河サーベイの結果を解析したところ，二点相関関数にこの振動の痕跡が見出された[19],[20]．今後より広範囲の観測を行う事で，BAO に関するより詳細な観測結果が得られると期待される．BAO のピークの位置，高さを解析する事で，宇宙の進化の歴史を解明する事が出来，ダークエネルギーのモデルに対する制限も与えられる．

BAO の観測に対する理論的予言は，シミュレーションや摂動論を用いてなされている．Lagrange 的摂動論が，摂動論の中では精度良く構造の進化を記述出来るものとみなされてきたが，近年はさらなる補正を施す事により，より精度の良い予言を行える事が出来る様になってきている．Resummation theory と呼ばれる一連の手法は，既知の摂動解をルールに基づいて再加算する[21]．

Lagrange 的摂動論の利点として，実際の空間分布である real space の分布のみならず，地球との相対速度（後退速度）に基づいて座標空間に置き換えた redshift space の分布も容易に得られるという点がある．(5) で示した様に，物質の速度は宇宙膨張によって動く第一項と，固有運動の第二項の和で表される．観測の場合にはこの両者の分布ができず，和の形で得られる．このため得られた速度から座標に置き換えると，固有運動の影響で実際の位置とずれが生じる．そこで，観測と理論からの予言を比較する際には，real space ではなく redshift space における比較が重要になる．

Resummation theory を適用する際，初期密度ゆらぎがガウス分布に従うかどうかで計算量が大きく異なる．現在の観測では，ガウス分布を含む範囲の制限がかかっており，ガウス分布を仮定しても支障はないものと考えられる．ガウス分布の密度揺らぎの仮定の下で，Resummation theory による理論的予言として，密度揺らぎのパワースペクトルに関しては 2-loop 補正の計算がなされている[22]．この計算には三次までの摂動解が必要となる．また，密度揺らぎのバイスペクトラムに関しては，四次までの摂動解を用いて 1-loop 補正の計算がなされている．

パワースペクトルは観測結果を表す統計量として重要なものの一つである．さらなる精度向上のために 3-loop 補正を行う事が考えられるが，3-loop 補正は四次までの摂動解では行う事が出来ず，五次の摂動解を必要とする．我々の結果を用いる事で，パワースペクトルに対する 3-loop の計算を行う事が出来，パワースペクトルにおける BAO の効果の理論的予言がより精密に出来る様になる．計算に関しては，一般の次数の摂動解を用いた場合の Resummation theory の式が導出されており，この式に我々の結果を代入する事で計算する事が出来る[22]．

4.2 宇宙論的 N 体シミュレーションの初期値問題

宇宙の大規模構造形成において，非線形段階の構造の進化を考察する際には宇宙論的 N 体シミュレーションが用いられてきた．物質分布を N 個の質点で代表させ，質点間の相互作用は Newton 重力で及ぼされ，かつ宇宙膨張による引き離しの効果を考慮したシミュレーションである．

宇宙の晴れ上がり時の密度ゆらぎは非常に小さいので，宇宙の腫れ上がり時を宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件として与えると数値計算上の誤差が非常に大きくなる．そこでまず，準非線形段階まで Lagrange 的線形摂動論で時間発展を行う．準非線形段階の密度ゆらぎを宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件として，シミュレーションを実行する事が長年行われてきた．

ところが Crocce, Pueblas, Scoccimarro[23]により，Lagrange 的摂動論の二次の摂動まで考慮して初期条件を設定すると，線形摂動論で初期条件を設定した場合に対し，強い非線形段階の構造が統計的に異なる事が示された．具体的には，宇宙の腫れ上がり時の密度ゆら

ぎとしてガウス分布

$$\mathrm{Prob}(\delta) \propto e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}, \tag{165}$$

を与える．σ は密度揺らぎの分散を表す．密度揺らぎが線形成長すれば分布関数の形は変わらないが，非線形成長によりガウス分布からずれる．非ガウス性を表す量として，skewness, kurtosis を定義する．

$$\text{skewness} \quad : \quad \gamma = \frac{\langle \delta^3 \rangle_c}{\sigma^4}, \tag{166}$$

$$\text{kurtosis} \quad : \quad \eta = \frac{\langle \delta^4 \rangle_c}{\sigma^6}. \tag{167}$$

E-dS 宇宙モデルの場合は Euler 的な二次摂動から準非線形段階では以下の値が得られている．

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{34}{7} + \mathcal{O}(\sigma^2), \\ \eta &= \frac{60712}{1323} + \mathcal{O}(\sigma^2). \end{aligned} \tag{168}$$

強い非線形段階では，これよりも大きな値となる．

強い非線形段階において，初期条件を Lagrange 的摂動論の線形摂動と二次の摂動を与えた場合において，skewness，kurtosis に 10% 以上のずれが見られた．さらに Tatekawa and Mizuno[24] により，Lagrange 的摂動論の三次の摂動まで考慮した場合のシミュレーションがなされている．この場合には，密度揺らぎの非ガウス性は，二次と三次の摂動を用いた場合の差で 1% 程度におさまる事が分かった．すなわち，観測において 1% 以下の精度を求める段階に至るまでは，宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件として，Lagrange 的摂動論の二次の摂動までを考慮すれば十分といえる．

将来，より高い精度を必要とする観測が得られた際，宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件をどのように与えるかを考える際，高次の Lagrange 的摂動が必要になると考えられる．

5. 結　言

宇宙の大規模構造形成において，Lagrange 的摂動論はかつては準非線形段階までを扱えるもので，強い非線形段階は宇宙論的 N 体シミュレーションを用いなければ解明出来ないため，重要視されない時期が長い間続いてきた．近年，深宇宙の銀河サーベイが計画される様になり，構造の進化の結果のみならず構造の進化を解明する事が重要になってきている．深宇宙（$z > 1$）では構造の進化の途上にあり，Lagrange 的摂動論でも十分に構造の議論が出来る．このためここ数年は Lagrange 的摂動論が見直される様になってきた．特に Resummation theory の急速な発展により，既知の Lagrange 的摂動論の解を用いて，さらなる精度向上を進める事が出来る様になってきている．

Resummation theory では既知の摂動解を用いる事から，高次の摂動解を導出する事が必要になる．1990 年代に三次の摂動解までが発表されていたが，そこから先の解は公にはされていなかった．我々はまず四次の摂動解を導出し，その後五次の摂動解を導出した．五次まで精度を上げる事により，密度揺らぎのパワースペクトルに対して 3-loop の補正を行う事が出来，極めて精度の高い予言を解析的に行う事が出来る様になった．我々が導出した摂動解は，近未来の観測論的宇宙論において大いに活用される事が期待出来る．

参考文献

[1] K. Abazajian et al.: Astrophys. J. Supp., 182, 543 (2009).

[2] C. Hinshaw et al.: arXiv:1212.5226.

[3] T. Tatekawa: Recent Res. Devel. Astrophys., 2, 1 (2005).

[4] T. Tatekawa and S. Mizuno: *Dark Energy: Theories, Developments, and Implications* (K. Lefebvre and R. Garcia, eds.) (Nova Science, New York), 241 (2010).

[5] Y. B. Zel'dovich: Astron. Astrophys., 5, 84 (1970).

[6] F. R. Bouchet, R. Juszkiewicz, S. Colombi, and R. Pellat: Astrophys. J. 394, L5 (1992).

[7] T. Buchert and J. Ehlers: Mon. Not. R. Astron. Soc., 264, 375 (1993).

[8] T. Buchert: Mon. Not. R. Astron. Soc., 267, 811 (1994).

[9] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz: Astrophys. J., 296, 575 (1995).

[10] P. Catelan: Mon. Not. R. Astron. Soc., 276, 115 (1995).

[11] M. Sasaki and M. Kasai: Prog. Theor. Phys., 99, 585 (1998).

[12] C. Rampf and T. Buchert: J. Comp. Astropart. Phys., 06, 021 (2012).

[13] T. Tatekawa: Prog. Theor. Exp. Phys., 013E03 (2013).

[14] D. Munshi, V. Sahni, and A. A. Starobinsky: Astrophys. J., 436, 517 (1994).

[15] V. Sahni and S. F. Shandarin: Mon. Not. R. Astron. Soc., 282, 641 (1996).

[16] A. Yoshisato, T. Matsubara, and M. Morikawa: Astrophys. J., 498, 48 (1998).

[17] C. Rampf and Y. Y. Y. Wong: J. Comp. Astropart. Phys., 06, 018 (2012).

[18] T. Tatekawa: in preparation.

[19] D. J. Eisenstein, W. Hu, J. Silk, and A. S. Szalay: Astrophys. J., 494, L1 (1998).

[20] A. Meiksin, M. White, and J. A. Peacock: Mon. Not. R. Astron. Soc., 304, 851 (1999).

[21] M. Crocce and R. Scoccimarro: Phys. Rev. D, 73, 063519 (2006).

[22] T. Okamura, A. Taruya, and T. Matsubara: J. Cosmol. Astropart. Phys., 08, 012 (2011).

[23] M. Crocce, S. Pueblas, R. Scoccimarro: Mon. Not. R. Astron. Soc., 373, 369 (2006).

[24] T. Tatekawa and S. Mizuno: J. Comp. Astropart. Phys., 12, 014 (2007).