

重力崩壊過程における時間的測地線束の収束性 –その幾何摂動効果に対する基礎方程式の導出–

三輪亮太* 芹生正史*

Focusing of Timelike Geodesic Congruences in Gravitational Collapses –Derivation of the Fundamental System of Equations Describing Geometrical Perturbation Effects–

Ryota MIWA* and Masafumi SERIU*

(Received February 6, 2015)

We derive the fundamental system of equations describing modification in the focusing properties of timelike geodesic congruences caused by the conformal perturbations in the spacetime geometry. These new equations are expected to play the central role for the detailed understanding of the final stage of gravitational collapses. The system of these equations is obtained by analyzing the linear-responses to the conformal perturbations in the system of the Raychaudhuri-type equations. We then apply it to the simplest model of the gravitational collapse, the time-reversed Friedmann-Robertson-Walker model, and explicitly analyze the property of these equations. It turns out that the focusing properties of geodesic congruences are much more sensitive to the detailed form of the conformal perturbations than originally expected, so that the final stage of gravitational collapses can be classified into several cases depending on the functional form of the conformal perturbations.

Key Words : Singularity theorems, Raychaudhuri equation, Conformal perturbation

1. 序文

本論文は、芹生の研究指導のもとに三輪が執筆した修士学位論文「重力収縮する時間的測地線束の幾何摂動効果に対する基礎方程式系」^[1]の根幹部分を要約したものである。ここでは、後に詳しくみるように、時空の幾何学に共形的摂動が加わった場合に限定して解析した。その諸結果を含む、完全に一般的な幾何摂動に関するより包括的な解析については文献^[2]を参照されたい。また、以下では紙数の制約で、多くの重要な用語についてその定義や説明を省かざるを得なかった(例えば「特異点」・「測地線」など)。これらについては、概ね文献^[1]に述べてあるが、より詳しくは文献^[3,4]を参照されたい。高い対称性を持つ時空モデルで、

自然な解釈が可能なものは、(特殊な一部の例外を除いて)特異点が存在する。例えば一様等方時空でのビッグバン特異点や、ブラックホール時空での曲率特異点などがあげられる。これらの特異点は、時空モデルの高い対称性のために生じたのではないかとの予想のもと、当初詳しい分析がなされたが、その予想に反して実はきわめて一般的に生じるものであることがPenroseとHawkingによる特異点定理によって最終的に示された。まずこれをまとめておく。^[5]

特異点定理 (Penrose-Hawking, 1970)

時空 (M, g_{ab}) が次の4つの条件を満たすとす。

- (I) 時空に分布する物質は strong energy condition を満たす。すなわち、任意の非空間的ベクトル v^a について $R_{ab}v^av^b \geq 0$ を満たす。
- (II) timelike generic condition または null generic condition

*大学院工学研究科物理工学専攻

*Applied Physics Course, Graduate School of Engineering

tion の少なくとも一方を満たす.

(III) 閉じた時間的曲線が存在しない.

(IV) 次の少なくとも一つを満たす.

(a) (M, g_{ab}) はコンパクトで achronal な端の無い集合を持つ (「宇宙が閉じている」).

(b) (M, g_{ab}) が trapped surface を持つ.

(c) $p \in M$ から出る未来 (または過去) 向きの null 測地線束に関してそれを構成する各測地線に沿ってその expansion が負になるような点が存在する.

このとき, (M, g_{ab}) は少なくとも 1 つの完備でない非空間的測地線をもつ.

我々の宇宙が現在膨張していることは観測的に確立している (Hubble の法則) から, 過去向きの測地線束を考えれば expansion が負の値を持つことになる. よって我々の宇宙は過去にさかのぼる視点では (IV)(c) を満たしており, さらにまた, (I)-(III) も満たしていると仮定するのが自然なので, 我々の宇宙を数学的モデルで表現したとき, この定理は満たされていると考えられる. 実際, 過去にさかのぼって宇宙の最初期にまで古典時空を外挿できるとすれば, 初期特異点 (ビッグバン特異点) が生じると考えられている. (その前に量子時空の効果が現れて初期特異点が回避されるであろうと期待されているが, 本稿では量子時空についてはこれ以上論じない.)

ところで, 測地線束の収束性を記述する Raychaudhuri 方程式によると, 測地線束の expansion が負の値を持つれば, その測地線束は収束する. 実は上記の特異点定理は「特異点の発生は測地線束の収束がその引き金となっている」ことを数学的に精密化して証明されるのである.

さて, 今回の研究では, 時空の幾何にゆらぎが加わるとき, それは特異点発生を促進させるのか, またはその妨げになるのかということを分析することを目標に, 必要な数学的枠組みを構成することに取り組む. 上の考察から明かなように, そのためには, 時空に幾何摂動を加えることが, 時間的測地線束の収束性にどのような影響を及ぼすかを分析すればよいことがわかる. 今回は解析の簡単化のため, 専ら共形的幾何摂動に限定して分析することにする. 冒頭でも述べたように, より完全な幾何摂動に関する包括的分析は文献 [2] においてなされている.

そこで, 共形的幾何摂動による時間的測地線の変動を表す基礎方程式を導出することを考える. 基礎方程

式が首尾よく得られた後は, その性質を理解するために, もっとも単純な重力崩壊モデルである「時間反転した Friedmann-Robertson-Walker 時空」にこれを適用し, その様子を分析することにする.

2. Raychaudhuri 方程式

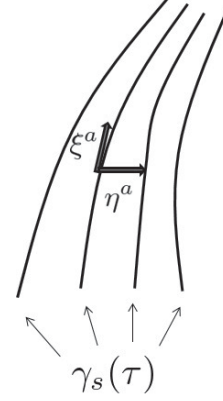


図 1. 測地線の 1 パラメータ族 $\{\gamma_s(\tau)\}_{s \in I}$

本節は, 次節以降に示す今回の解析で必要になる時間的測地線束の諸性質についての概観であり, その詳細は文献 [3] を参照されたい.

(M, g_{ab}) を n 次元の時空として, 図 1 のような時間的測地線束の 1 パラメータ族 $\{\gamma_s(\tau)\}_{s \in I}$ について考察する. この測地線束が作る 2 次元部分多様体に, 座標として

$$\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a, \quad \eta^a = \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^a \quad (1)$$

を導入する. この 2 つのベクトルは座標関数に由来するものであることから交換する:

$$[\xi, \eta]^a = 0. \quad (2)$$

よって, η^a の測地線に沿った変化は,

$$\xi^b \nabla_b \eta^a = \eta^b \nabla_b \xi^a = B^a_b \eta^b \quad (3)$$

となる. ここで, B_{ab} は

$$B_{ab} \equiv \nabla_b \xi_a \quad (4)$$

で定義される量で, 以下の解析の中心的役割を果たす. 明らかに B^a_b は η^a の平行移動からのずれを表している. 別の見方をすると, γ_0 上を進む観測者が見る近傍の測地線の収束具合が, B^a_b による線形写像によって表現されることも意味していることがわかる. ここで, B_{ab} を次のように分解するのがよい.

$$B_{ab} = \frac{1}{n-1} \theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab}, \quad (5)$$

ここに,

$$\begin{cases} \theta = B^{ab}h_{ab} & (\text{トレース}), \\ \sigma_{ab} = B_{\bar{a}\bar{b}} - \frac{1}{3}\theta h_{ab} (\text{対称トレースフリー}), \\ \omega_{ab} = B_{ab} & (\text{反対称}). \end{cases} \quad (6)$$

このとき θ を expansion (膨張), σ_{ab} を shear (ずれ), ω_{ab} を twist (捩じれ) という. 測地線束の $n-1$ 次元横断面に関して, θ はその体積の膨張率を, σ_{ab} はその形の歪み率を, ω_{ab} は回転率を表していると解釈できる. h_{ab} は空間的計量で,

$$h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b \quad (7)$$

と表される.

B_{ab} の測地線に沿った変化は

$$\xi^c \nabla_c B_{ab} = -B^c_b B_{ac} + R_{cba}{}^d \xi^c \xi_d \quad (8)$$

となる. これを式 (5) のように分解すると,

$$\xi^c \nabla_c \theta = \frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{n-1}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{ab}\xi^a \xi^b \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \xi^c \nabla_c \sigma_{ab} = & -\frac{2}{n-1}\theta \sigma_{ab} - \sigma_{ac}\sigma^c_b - \omega_{ac}\omega^c_b \\ & + \frac{1}{n-1}h_{ab}(\sigma_{cd}\sigma^{cd} - \omega_{cd}\omega^{cd}) \\ & + C_{cbad}\xi^c \xi^d + \frac{1}{n-2}\tilde{R}_{ab} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\xi^c \nabla_c \omega_{ab} = -\frac{2}{n-1}\theta \omega_{ab} - 2\sigma^c_b \omega_{ac} \quad (11)$$

となる. ここで, C_{cbad} は Wyle テンソル, \tilde{R}_{ab} は空間的な R_{ab} のトレースフリー部分

$$\tilde{R}_{ab} = h_{ac}h_{bd}R^{cd} - \frac{1}{n-1}h_{ab}h_{cd}R^{cd} \quad (12)$$

である. 式 (11) より, ひとたび ω_{ab} がゼロになると恒等的に ω_{ab} はゼロであることが分かる. また, 測地線上のある点 p で $\sigma_{ab} = 0, \omega_{ab} = 0$ となったとしても式 (10) より, $R_{cbad}\xi^c \xi^d$ のトレースフリー部分について

$$\begin{aligned} R_{cbad}\xi^c \xi^d + \frac{1}{n-1}R_{cd}\xi^c \xi^d h_{ab} \\ = C_{cbad}\xi^c \xi^d + \frac{1}{n-2}\tilde{R}_{ab} \neq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

が成立するならば, その点の近傍で σ_{ab} が生じることが分かる.

特に式 (9) を Raychaudhuri 方程式という. ここで, この方程式の最後の項の符号について考える. Einstein 方程式を用いると $R_{ab}\xi^a \xi^b$ は,

$$\begin{aligned} R_{ab}\xi^a \xi^b &= 8\pi \left[T_{ab} - \frac{1}{n-2}Tg_{ab} \right] \xi^a \xi^b \\ &= 8\pi \left[T_{ab}\xi^a \xi^b + \frac{1}{n-2}T \right] \end{aligned} \quad (14)$$

と表される. つまり, エネルギー運動量テンソル T_{ab} が strong energy condition

$$T_{ab}\xi^a \xi^b \geq -\frac{1}{n-2}T \quad (15)$$

を満たすとき $R_{ab}\xi^a \xi^b \geq 0$ となる.

Frobenius の定理より, 測地線束が超曲面に垂直ならば, $\omega_{ab} = 0$ となる. また, $\sigma_{ab}\sigma^{ab} \geq 0$ である. よって, これらの仮定の下で Raychaudhuri 方程式 (9) は,

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \frac{1}{n-1}\theta^2 \leq 0 \quad (16)$$

となる. これを解くと,

$$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \frac{1}{n-1}\tau, \quad \theta(0) = \theta_0 \quad (17)$$

を得る. $\theta_0 < 0$ (つまり, 測地線束が収束し始めている) とすると, 測地線が未来方向に充分長く伸びている限り, θ^{-1} はどこかで必ずゼロを通る. このことから固有時 $\tau \leq \frac{n-1}{|\theta_0|}$ 以内の未来に θ は $-\infty$ に発散し, 時間的測地線束が収束することがわかる. 以上から次の定理が成立する.

定理

ξ^a を超曲面に垂直な時間的測地線束の接ベクトル場とする. また, strong energy condition $R_{ab}\xi^a \xi^b \geq 0$ が成り立つとする. もし測地線上の任意の点で expansion θ が負の値 θ_0 をとれば, 測地線に沿って固有時 $\tau \leq \frac{n-1}{|\theta_0|}$ 以内に θ は $-\infty$ に発散する.

3. 共形的幾何摂動

本節から, いよいよ今回の解析について述べていく. 前節で時間的測地線束が収束するための条件を見た. ここでは, 時空に加えた幾何摂動が測地線束の収束性にどのような影響を及ぼすかを分析する.

3.1 摂動

(\mathcal{M}, g_{ab}) を n 次元の時空として, $\{g_{ab}(\lambda)\}_{\lambda \in I}$ を次を満たす計量の 1 パラメータ族とする:

1. $\{g_{ab}(\lambda)\}_{\lambda \in I}$ を λ の関数と見ると, C^∞ 関数.

2. $g(\lambda = 0) = g^0$. (g^0 は既知の厳密解)

すると $g(\lambda)$ は

$$\begin{aligned} g_{ab}(\lambda) &= g_{ab}^0 + \lambda \gamma_{ab} + O(\lambda^2) \\ \gamma_{ab} &= \left. \frac{dg_{ab}}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \end{aligned} \quad (18)$$

と表される. すなわち, λ が充分小さいとき $g(\lambda)$ は g^0 からわずかにずれた幾何を与えていることになる.

以後、 λ について一次の近似の範囲で考察することにする。

共形的幾何摂動の場合、計量は次のように与えられる。(以下では既知の厳密解を表す右上のゼロは省略する)

$$g_{ab}(\lambda) = e^{2\lambda f(\tau, x)} g_{ab} \quad (19)$$

$$\gamma_{ab} = \left. \frac{dg_{ab}(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = 2f(\tau, x) g_{ab} \quad (20)$$

3.2 測地線方程式の摂動

時間的測地線の摂動を考える。測地線のアフィン・パラメータを固有時 τ にとり、 ξ^a を測地線の接ベクトルとする。幾何摂動による接ベクトルのずれを

$$\chi^a \equiv \left. \frac{d\xi^a(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (21)$$

と定義する。

$\nabla_a^{(\lambda)}$ を $g_{ab}(\lambda)$ に、 ∇_a を g_{ab} にそれぞれ関連付けられた微分演算子とすると、測地線方程式は

$$\begin{aligned} \xi^b(\lambda) \nabla_b^{(\lambda)} \xi^a(\lambda) \\ = \xi^b(\lambda) \nabla_b \xi^a(\lambda) + C^a{}_{bc}(\lambda) \xi^b(\lambda) \xi^c(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

である。この両辺を λ 微分すると、

$$\xi^b \nabla_b \chi^a = -B^a{}_b \chi^b - 2 \frac{df}{d\tau} \xi^a - \nabla^a f \quad (23)$$

となる。これが測地線方程式の摂動を表す方程式である。

さらに、この方程式を ξ^a 方向と ξ^a に垂直方向に分解する。

$$\chi^a = \chi^a_{\perp \xi} + \chi^a_{\parallel \xi} \quad (24)$$

と分解した場合、 ξ^a 方向のずれ $\chi^a_{\parallel \xi}$ は元の測地線の接ベクトルに平行なので興味がない（これはゲージ自由度と解釈できる）。そこで、

$$\nu^a \equiv \chi^a + f \xi^a \quad (25)$$

という量を定義する。これは

$$\xi_a \nu^a = 0, \quad \xi^b \nabla_b (\xi_a \nu^a) = 0 \quad (26)$$

を満たす。つまり ν^a は、測地線に沿って常に ξ^a に垂直である。接ベクトルの摂動を表すのに単純に χ^a を用いるのではなく、より幾何的意味のある ν^a を用いて表すことで、以下で導出する数式のすべてが非常に簡単化されることがわかる。これが本解析の技術上の鍵となるポイントである。

結局、式 (23) を分解すると、

$$\xi^b \nabla_b \nu^a + B^a{}_b \nu^b = -D^a f \quad (27)$$

このように書くことができる。ここで D_a は ξ^a に垂直な超曲面上の微分演算子である。

$$\mathcal{L}^a{}_b \nu^b = \delta^a{}_b \xi^c \nabla_c + B^a{}_b \quad (28)$$

とおくと、

$$\mathcal{L}^a{}_b \nu^b = -D^a f \quad (29)$$

である。 $f = 0$ ならば、摂動がないので $\nu^a = 0$ という自明な解以外存在しない。つまり、 $\mathcal{L}^a{}_b$ は逆行列を持つ。よって、

$$\nu^a = -(\mathcal{L}^{-1})^a{}_b D^b f. \quad (30)$$

これが以後の解析で中心的役割を果たす方程式である。これは共形的幾何摂動 f の、しかも空間的分布の様子 $D^a f$ によって測地線の変動 ν^a が完全に決定されることを意味している。

3.3 Raychaudhuri 方程式の摂動

いよいよ時間的測地線束に対する共形的幾何摂動の効果を解析していく。以下、 λ の任意の関数 $Q(\lambda)$ の λ 微分 ($\left. \frac{dQ(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}$) を $\overset{\circ}{Q}$ と表記することにする。

測地線束の収束具合を表す

$$B_{ab}(\lambda) = \nabla_b^{(\lambda)} \xi_a(\lambda)$$

の摂動は、

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{B}_{ab} = f B_{ab} + D_b \nu_a + \frac{df}{d\tau} h_{ab} + \frac{2}{n-1} \theta \nu_a \xi_b \\ + 2\xi_a \sigma_{\bar{b}c} - 2\xi_a \omega_{\bar{b}c} \nu^c \end{aligned} \quad (31)$$

と書くことができる。これより、時間的測地線束の expansion, shear, twist の摂動は次のように求まる。

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\theta} = -f\theta + D_a \nu^a + (n-1) \frac{df}{d\tau} \\ \overset{\circ}{\sigma}_{ab} = f\sigma_{ab} + 2\xi_a \sigma_{\bar{b}c} \nu^c + \widetilde{D}_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}} \\ \overset{\circ}{\omega}_{ab} = f\omega_{ab} - 2\xi_a \omega_{\bar{b}c} \nu^c + D_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}} \end{cases} \quad (32)$$

ここで、 $\widetilde{D}_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}}$ は $D_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}}$ のトレースフリー部分

$$\widetilde{D}_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}} = D_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}} - \frac{1}{n-1} D_c \nu^c h_{ab} \quad (33)$$

を表す。式 (32) より、摂動を加えても常に $\omega_{ab} = 0$ であるためには

$$D_{\bar{b}} \nu_{\bar{a}} = 0 \quad (34)$$

という条件を課す必要がある。

次に Raychaudhuri 方程式の摂動を求める。 $B_{ab}(\lambda)$ の測地線に沿った変化

$$\begin{aligned} \xi^c(\lambda) \nabla_c^{(\lambda)} B_{ab}(\lambda) \\ = -B^c{}_b(\lambda) B_{ac}(\lambda) + R_{cba}{}^d(\lambda) \xi^c(\lambda) \xi_d(\lambda) \end{aligned} \quad (35)$$

の摂動は,

$$\begin{aligned}
(\xi^c \nabla_c B_{ab})^\circ &= - \left(\frac{\theta}{n-1} h_{ab} + \sigma_{ab} + 3\omega_{ab} \right) \frac{df}{d\tau} \\
&+ \frac{d^2 f}{d\tau^2} h_{ab} - D_a D_b f - \frac{2\theta}{n-1} D_b \nu_a - 2 D_b \nu^c \sigma_{ac} \\
&- D_b \nu^c \omega_{ac} - D_c \nu_a \omega^c_b - 2 \left(\frac{\theta}{n-1} \right)^2 \xi_a \nu_b \\
&- \frac{4\theta}{n-1} (\xi_a \sigma_{bc} - \xi_a \omega_{bc}) \nu^c \\
&- (\xi_a \sigma_{bc} - \xi_a \omega_{bc}) \sigma^c_d \nu^d \\
&+ (\xi_a \sigma_{bc} - \xi_a \omega_{bc}) \omega^c_d \nu^d - 2 R_{abcd} \nu^c \xi^d \quad (36)
\end{aligned}$$

となる. よって, Raychaudhuri 方程式の摂動は次のようになる.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^\circ &= -2f \frac{d\theta}{d\tau} - \theta \frac{df}{d\tau} + (n-1) \frac{d^2 f}{d\tau^2} \\
&- \Delta f - \frac{2\theta}{n-1} D_a \nu^a - 2 D^a \nu^b (\sigma_{ab} + \omega_{ab}) \\
&- 2 R_{ab} \xi^a \nu^b \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi^c \nabla_c \sigma_{ab})^\circ &= -\sigma_{ab} \frac{df}{d\tau} - \widetilde{D_a D_b} f \\
&- \frac{2\theta}{n-1} \widetilde{D_b \nu_a} - \widetilde{D_b \nu^c \sigma_{ac}} - \widetilde{D_b \nu^c \omega_{ac}} \\
&- \widetilde{D_c \nu_a \sigma^c_b} - \widetilde{D_c \nu_a \omega^c_b} - \frac{4\theta}{n-1} \xi_a \sigma_{bc} \nu^c \\
&- \frac{2}{n-1} \left(\frac{\theta^2}{n-1} - 1 \right) \xi_a \nu_b - \xi_a \sigma_{bc} \sigma^c_d \nu^d \\
&- \xi_a \omega_{bc} \omega^c_d \nu^d - 2 R_{abcd} \nu^c \xi^d \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\xi^c \nabla_c \omega_{ab})^\circ &= 2\omega_{ab} \frac{df}{d\tau} - \frac{2\theta}{n-1} D_b \nu_a \\
&- D_b \nu^c \sigma_{ac} - D_b \nu^c \omega_{ac} - D_c \nu_a \sigma^c_b - D_c \nu_a \omega^c_b \\
&- \frac{4\theta}{n-1} \xi_a \omega_{bc} \nu^c - \xi_a \omega_{bc} \sigma^c_d \nu^d - \xi_a \sigma_{bc} \omega^c_d \nu^d \quad (39)
\end{aligned}$$

ここで $\Delta = D_a D^a$, チルダの付いている項はトレースフリーを表している.

4. Friedmann-Robertson-Walker 時空での初期特異点の分析

Friedmann-Robertson-Walker 時空 (以後 FRW 時空と略記) はビッグバン特異点から始まり, 膨張していく一様等方時空のモデルである. これを時間反転させると, 宇宙が収縮して特異点が発生する時空モデルと見ることができる. この場合, 共形的幾何摂動による測地線の変動を表す基礎方程式

$$\xi^b \nabla_b \nu^a + B^a_b \nu^b = -D^a f \quad (40)$$

を厳密に解くことができ, 幾何摂動に伴う測地線の変動を分析することができる. この時空モデルの計量は

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (41)$$

と表され, スケール因子 $a(\tau)$, 空間曲率 $K (= 1, 0, -1)$ の2つの物理量だけで特徴づけられる.

FRW 時空での時間的測地線束について, 共動座標系を採用すれば, 測地線の接ベクトル ξ^a の成分は $\xi^\mu = (1, 0, 0, 0)$ で与えられる. よって, この座標系での B_{ab} の成分は

$$B_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{a\dot{a}}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & a\dot{a}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & a\dot{a}r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (42)$$

と書くことができる. 測地線束の expansion, shear, twist は

$$\theta = 3 \frac{\dot{a}}{a}, \quad \sigma_{ab} = 0, \quad \omega_{ab} = 0 \quad (43)$$

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \theta h_{\mu\nu} \quad (44)$$

となる, よって式 (40) を成分表示すれば

$$\frac{d\nu^\mu}{d\tau} + \frac{\dot{a}}{a} \nu^\mu = -D^\mu f \quad (45)$$

となる. これを解くと,

$$\nu^\mu(\tau) = -a(\tau) D^\mu \int_0^\tau \frac{f(\tau', x)}{a(\tau')} d\tau' \quad (46)$$

が得られる. よって, FRW 時空での expansion, shear, twist の摂動は,

$$\dot{\theta}^\circ = -f\theta - a(\tau) \Delta \int_0^\tau \frac{f(\tau', x)}{a(\tau')} d\tau' + 3 \frac{df}{d\tau} \quad (47)$$

$$\dot{\sigma}^\circ_{\mu\nu} = -a(\tau) \widetilde{D_\mu D_\nu} \int_0^\tau \frac{f(\tau', x)}{a(\tau')} d\tau' \quad (48)$$

$$\dot{\omega}^\circ_{\mu\nu} = 0 \quad (49)$$

となる. そして Raychaudhuri 方程式の摂動は

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^\circ &= -2f \frac{d\theta}{d\tau} - \theta \frac{df}{d\tau} + 3 \frac{d^2 f}{d\tau^2} - \Delta f \\
&+ \frac{2}{3} \theta a(\tau) \Delta \int \frac{f(\tau', x)}{a(\tau')} d\tau' \quad (50)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d\sigma_{ab}}{d\tau} \right)^\circ = \widetilde{D_a D_b} f + \frac{2}{3} \theta a(\tau) \widetilde{D_a D_b} \int \frac{f(\tau', x)}{a(\tau')} d\tau' \quad (51)$$

$$\left(\frac{d\omega_{ab}}{d\tau} \right)^\circ = 0 \quad (52)$$

となる.

式 (50) から分かるように, 時間的測地線束の収束性は f とその微分量がどのような値をとるのかで決まる. 例えば, $f < 0$, $\frac{df}{d\tau} < 0$, $\frac{d^2f}{d\tau^2} < 0$, $\Delta f > 0$ のときに収束性が最も強まる.

計量が $g_{ab}(\lambda) = e^{2\lambda f} g_{ab}$ という形をしていることから, 関数 f が $f < 0$, $\frac{df}{d\tau} < 0$, $\frac{d^2f}{d\tau^2} < 0$ ようなときには共形因子 $e^{2\lambda f}$ が測地線に沿って小さくなっていくので, 測地線束の収束性が強まっていることが読み取れる.

測地線の変動 ν^a は f の空間微分によって決まる量なので, 式 (50) についても Δf の項が摂動の影響を本質的に表している.

もし, f が鞍点を持つような関数の場合, 鞍点付近ではずれ方次第で収束性が変化することが分かる.

5. まとめ

時空に共形的幾何摂動を加えることが, 時間的測地線束の収束性にどのような影響を及ぼすかを分析した. 共形的幾何摂動による時間的測地線の変動を表す基礎方程式を導出し, また時間的測地線束の収束性を記述する Raychaudhuri 方程式の変動を導出した. その結果を「時間反転した FRW 時空」に適用し, 具体的に測地線束の収束性を分析した. その結果, 共形因子 $e^{2\lambda f}$ の任意関数 f の形によって測地線束の収束性を分類できることが分かった. つまり, 「時間反転した FRW 時空」という単純なモデルであっても f の形に依存して特異点の生成過程が異なることが分かった.

参考文献

- [1] 三輪亮太: 「重力収縮する時間的測地線束の幾何摂動効果に対する基礎方程式系」 (2014 年度修士学位論文).
- [2] M. Seriu and R. Miwa: “Influence of geometrical perturbations on the gravitational focusing of timelike geodesic congruences” (投稿準備中).
- [3] R. M. Wald: *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [4] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis: *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973).
- [5] S. W. Hawking and R. Penrose: Proc. Roy. Soc. Phys., A314, 529 (1970)